

기계설계 (Bar and Truss)

Hyungmin Jun, Ph. D.

Multiphysics Systems Design Laboratory
Department of Mechanical System Engineering
Jeonbuk National University

- ▣ 트러스(Truss): 보통 건물, 교량, 탑 등의 설계에 활용
- ▣ 가장 간단한 1D 구조 요소(bar element), 바(Bar) 요소(Element)를 사용하여 트러스 구조 설계



(a)



(b)

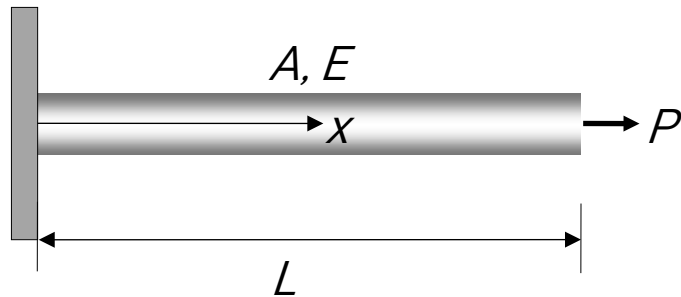
트러스 예: (a) 캐나다 퀘벡 주 몬트리올 생물권 박물관; (b) 미국 펜실베이니아 주 벤티 로스 대교

- ▣ 대부분의 구조해석 문제를 아래와 같이 가정하여 선형 정적 문제로 취급
 - ✓ (선형) 작은 변형량 (하중의 형태가 변형된 형상으로 변하지 않는다) → 미소변형
 - ✓ (선형) 탄성 재료 (소성이나 파손이 없음) → 선형탄성 재료
 - ✓ (선형) 경계조건(Boundary Condition) 변화 없음
 - ✓ (정적) 하중 (하중은 느리고 일정하게 가해짐)

- ▣ 선형해석은 구조물의 거동에 대해서 대부분의 정보(변위, 변형률, 응력 등)를 제공할 수 있으며, 많은 해석에 대해 좋은 근사값으로 간주



▣ 축방향으로 단면이 일정한 단순 바(Bar)



축방향 하중을 받는 탄성 Bar 요소

✓ 변형률-변위 관계식

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}$$

✓ 응력-변형률 관계식

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x)$$

✓ 평형 방정식 (Equilibrium Equation)

$$\frac{d\sigma(x)}{dx} + f(x) = 0$$

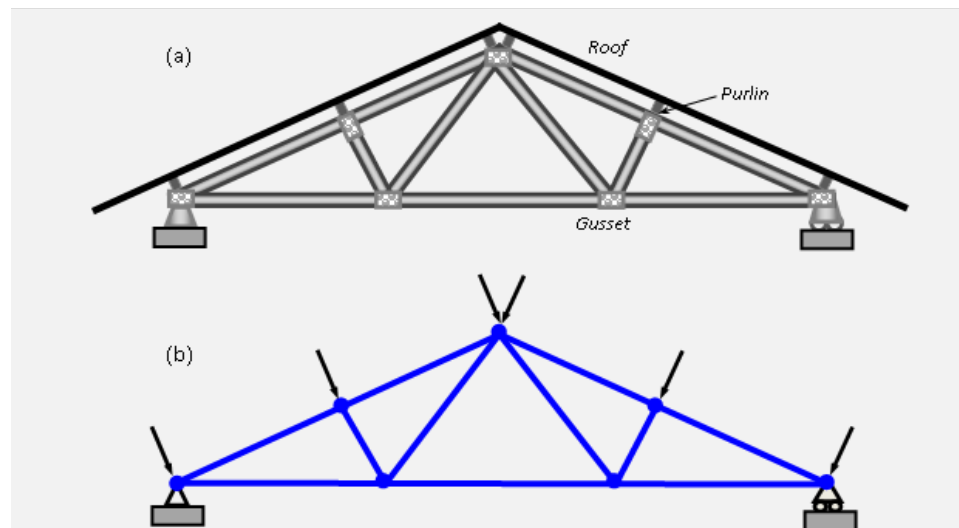
✓ 변위, 변형률, 응력을 구하기 위해 주어진 경계조건에서 해를 구함

✓ 단일 바(Bar)의 경우 쉽게 계산될수 있으나, 트러스 구조물은 복잡하고 많은 계산량을 요구

Truss 모델링과 Bar 요소 공식화

- ▣ 트러스(Truss) 설계 및 해석은 아래 가정이 사용
 - ✓ Bar 부재는 일정한 단면 가지며, 서로 마찰이 없는 핀으로 연결
 - ✓ 외부 하중은 Bar와 Bar를 연결해주는 조인트에만 적용될 수 있음

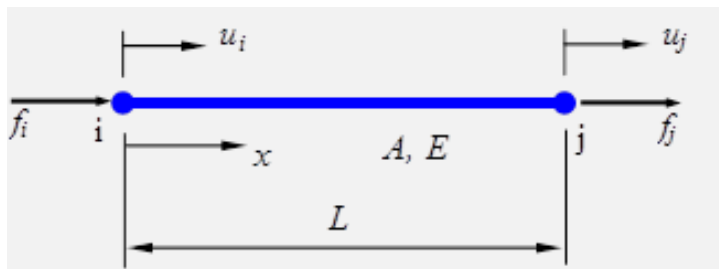
- ▣ 위 가정에 근거하여, 트러스 구조물은 축 하중만이 적용될 수 있으며, 굽힘 저항은 무시



평면 지붕 트러스의 모델링: (a) 실제 구조. (b) 이산화 모델



강성행렬 – 직접방법



✓ 바(Bar)는 스프링 처럼 거동하며, 이에 대한 강성행렬:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

✓ 축 변위: $u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_i + \frac{x}{L}u_j$

$$\varepsilon = \frac{u_j - u_i}{L} = \frac{\Delta}{L}$$

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E\Delta}{L} \quad \text{and} \quad \sigma = \frac{F}{A}$$

따라서, $F = \frac{EA}{L}\Delta = k\Delta$

✓ 바(Bar) 요소의 평형방정식:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

✓ 자유도 (DOFs, Degrees Of Freedom): 한 절점에서 변위벡터의 성분의 개수. 축의 방향으로 놓인 일차원 봉요소의 경우, 각 절점에서 한 개 DOF를 가짐



▣ 강성행렬 – 에너지 방법

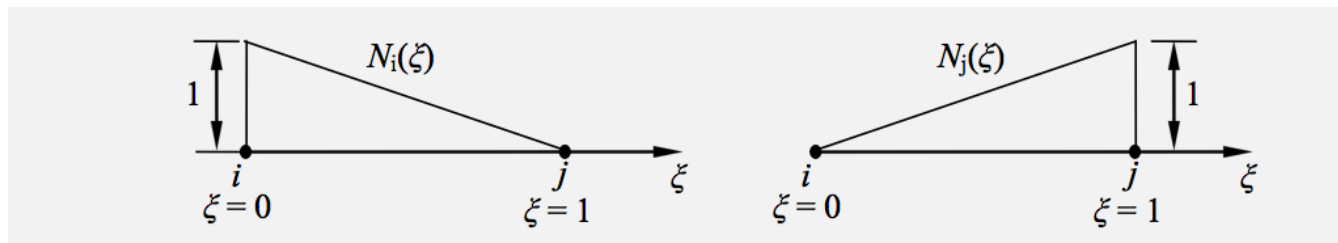
✓ 두가지 선형 형상함수(Shape Function):

$$N_i(\xi) = 1 - \xi, \quad N_j(\xi) = \xi \quad \text{where} \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

✓ 변위(Displacement) && 변형률(Strain):

$$u = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad \text{and} \quad \varepsilon = \frac{du}{dx} = \left[\frac{d}{dx} \mathbf{N} \right] \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{u}$$

✓ **B**: 변형률-변위 보간 행렬 $\mathbf{B} = [-1/L \quad 1/L]$



Bar 요소 형상함수



✓ 응력

$$\sigma = E\varepsilon = E\mathbf{B}\mathbf{u}$$

✓ 바(bar)에 저장된 변형률에너지(Strain Energy)

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}) dV \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left[\int_V (\mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B}) dV \right] \mathbf{u} \end{aligned}$$

✓ 외력 포텐셜 에너지:

$$\Omega = -f_i u_i - f_j u_j = -\mathbf{u}^T \mathbf{f}$$

✓ 시스템 총 포텐셜 에너지:

$$\Pi = U + \Omega$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left[\int_V (\mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B}) dV \right] \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f}$$

✓ 최소 포텐셜 에너지 원리로 $d\Pi = 0$,

$$\mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

$$\text{여기서 } \mathbf{k} = \int_V (\mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B}) dV$$

✓ 바(Bar) 요소의 강성행렬:

$$\mathbf{k} = \int_0^L \left\{ \begin{matrix} -1/L \\ 1/L \end{matrix} \right\} E \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} A dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



□ 분포하중 처리

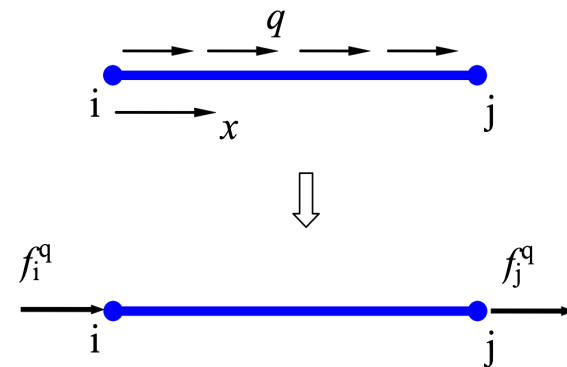
- ✓ 분포된 축하중 q (N/mm, N/m, lb/in) 은 형상함수로 요소의 동등한 절점힘으로 변환
- ✓ 분포하중 q 가 행한 일을 고려하면,

$$W_q = \frac{1}{2} \int_0^L u(x) q(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^L (\mathbf{N}\mathbf{u})^T q(x) dx = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \int_0^L \begin{bmatrix} N_i(x) \\ N_j(x) \end{bmatrix} q(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \int_0^L \mathbf{N}^T q(x) dx$$

- ✓ 등가 절점힘에 의한 일은

$$W_{f_q} = \frac{1}{2} f_i^q u_i + \frac{1}{2} f_j^q u_j = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{f}_q$$

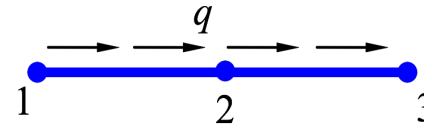


한 요소 상에 작용하는 분포하중의 변환



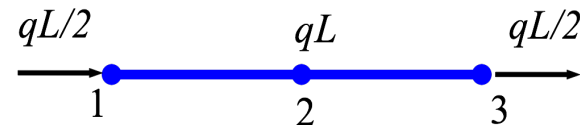
$W_q = W_{f_q}$ 로 놓으면 등가 절점힘 벡터:

$$\mathbf{f}_q = \begin{Bmatrix} f_i^q \\ f_j^q \end{Bmatrix} = \int_0^L \mathbf{N}^T q(x) dx = \int_0^L \begin{bmatrix} N_i(x) \\ N_j(x) \end{bmatrix} q(x) dx$$



✓ 만일 q가 상수인 경우엔,

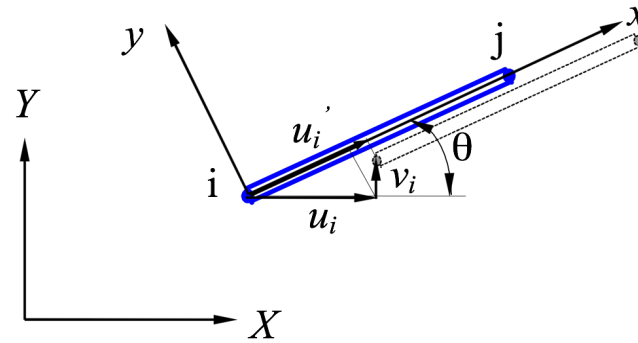
$$\mathbf{f}_q = q \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - x/L \\ x/L \end{bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} qL/2 \\ qL/2 \end{Bmatrix}$$



두 개 요소에 작용하는 일정한 강도의 분포하중 변환



□ 2D 바(Bar) 요소



2D 바(Bar)의 국부 및 전체 좌표계

<i>Local</i>	<i>Global</i>
x, y	X, Y
u_i', v_i'	u_i, v_i
1 DOF at each node	2 DOFs at each node



✓ 국부 및 전체좌표계에서 변위 벡터:

$$u'_i = u_i \cos \theta + v_i \sin \theta = \begin{bmatrix} l & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

$$v'_i = -u_i \sin \theta + v_i \cos \theta = \begin{bmatrix} -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

여기서 $l = \cos \theta$, $m = \sin \theta$

✓ 바(Bar) 요소 두 절점의 변위:

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

✓ 행렬 및 벡터 형태:

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{u}'_i = \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{u}_i$$

✓ 행렬 및 벡터 형태:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{T} \mathbf{u} \quad \text{with} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix}$$



✓ 국부(Local) 좌표계에서 관계식,
$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_i \\ u'_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_i \\ f'_j \end{Bmatrix}$$

✓ 위 방정식을 확장하면,
$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f'_i \\ 0 \\ f'_j \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{또는} \quad \mathbf{k}' \mathbf{u}' = \mathbf{f}'$$

✓ 변환식을 이용하면, $\mathbf{k}' \mathbf{T} \mathbf{u} = \mathbf{T} \mathbf{f} \quad \text{and} \quad \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T} \mathbf{u} = \mathbf{f}$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{T} \mathbf{u} \quad \text{with} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix}$$

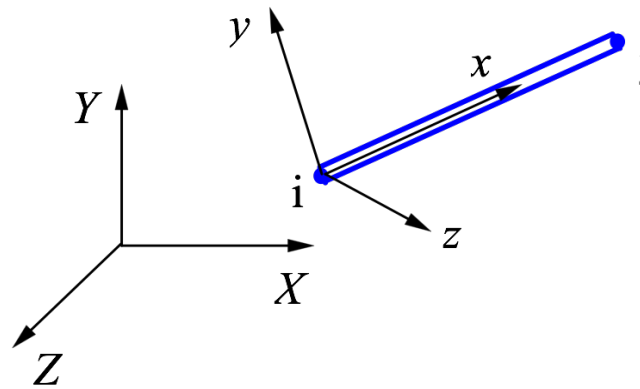
✓ 따라서, 전체좌표계에서 요소강성행렬, $\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T}$

✓ 양함수 형식(explicit form)으로 쓰면,

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} u_i & v_i & u_j & v_j \\ l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix}$$



3-D 바(Bar) 요소



3D 바(Bar)의 국부좌표와 전체좌표

<i>Local</i>	<i>Global</i>
x, y, z	X, Y, Z
u_i', v_i', w_i'	u_i, v_i, w_i
1 DOF at each node	3 DOFs at each node



✓ 변환관계식:

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ w'_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_X & l_Y & l_Z \\ m_X & m_Y & m_Z \\ n_X & n_Y & n_Z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}$$

$(l_X, l_Y, l_Z), (m_X, m_Y, m_Z)$ and (n_X, n_Y, n_Z)

: 전체 좌표계에서 국부 좌표축 x, y, z 의 각각 방향여현 코사인 (Direction Cosines)

- ✓ FEM 소프트웨어 패키지는 이러한 변환을 자동적으로 수행
- ✓ 바(Bar) 요소의 입력데이터: 각 절점의 (X, Y, Z) 좌표, E, A, 길이 L(두 절점의 좌표로부터 계산)



▣ 요소 응력

- ✓ 일단 절점변위가 요소에 대해서 얻어지면, 해당 요소 내의 응력은 기본 관계식으로부터 계산
- ✓ 2D 경우, 다음과 같이 계산

$$\sigma = E\varepsilon = E\mathbf{B}\mathbf{u}' = E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

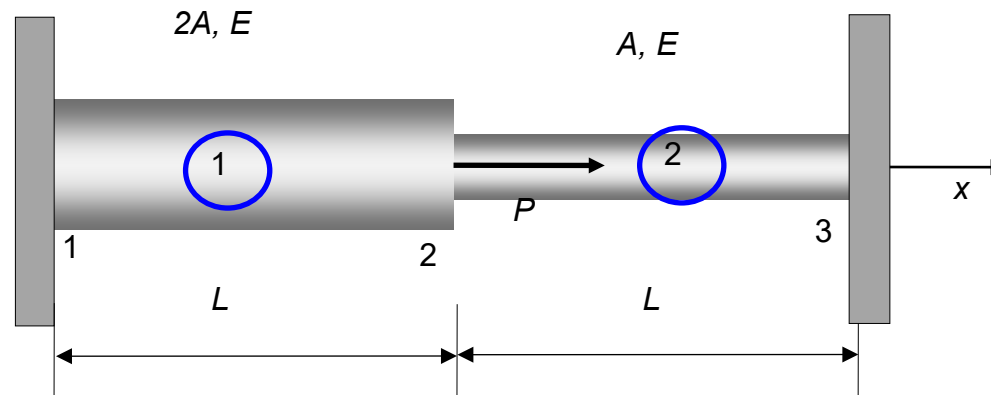
$$\text{즉, } \sigma = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -l & -m & l & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad \text{위 식은 2D 바(Bar) 요소에 대한 일반식}$$

트러스 예제

(Examples with Bar Elements)



예제 2.1



- ✓ 문제: 두 개 바(Bar)로 구성된 구조에서 응력을 구하라 (힘 P 가 작용, 양 끝은 구속)
- ✓ 풀이: 두 개의 1D 바(Bar) 요소 사용



✓ 요소 1의 강성행렬: $\mathbf{k}_1 = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ✓ 요소 2의 강성행렬: $\mathbf{k}_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

✓ 전체 방정식으로 결합하면,

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

✓ 하중과 경계조건 (BCs, Boundary Conditions): $F_2 = P, \quad u_1 = u_3 = 0$

✓ 전체 최종 방정식:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad \text{따라서,} \quad \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{PL}{3EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



✓ 요소 1 응력:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = E\mathbf{B}_1\mathbf{u}_1 = E\begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$
$$= E \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{E}{L} \left(\frac{PL}{3EA} - 0 \right) = \frac{P}{3A}$$

✓ 요소 2 응력:

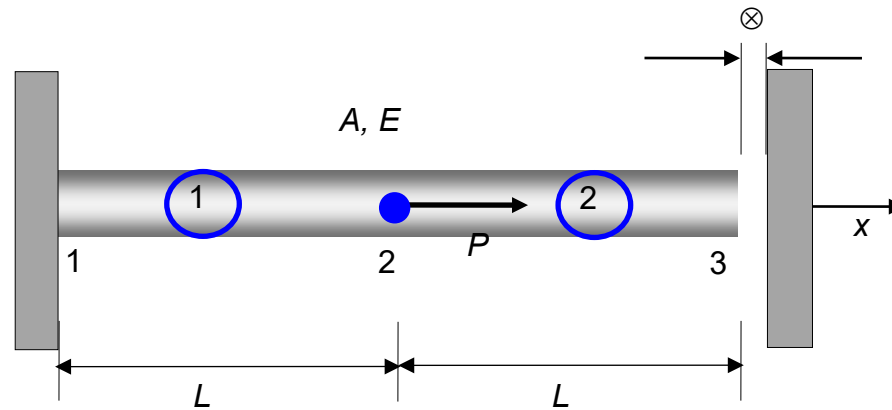
$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 = E\mathbf{B}_2\mathbf{u}_2 = E\begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$
$$= E \frac{u_3 - u_2}{L} = \frac{E}{L} \left(0 - \frac{PL}{3EA} \right) = -\frac{P}{3A}$$

✓ 결과 확인 : FBD을 그린 후, 구조 평형상태 확인





예제 2.2



✓ 문제: 다음에 주어진 데이터에 대해, 위에 나타난 바(Bar) 양 끝에 작용하는 반력 결정:

$$P = 6.0 \times 10^4 \text{ N}, \quad E = 2.0 \times 10^6 \text{ N/mm}^2, \\ A = 250 \text{ mm}^2, \quad L = 150 \text{ mm}, \quad \Delta = 1.2 \text{ mm}$$



- ✓ 이 문제에서 우선 오른쪽에 있는 벽과 봉 사이에서 접촉 발생 여부를 확인. 이를 위해서 우측에 벽이 없다고 생각하고 봉의 우측 끝단 변위를 계산

$$\Delta_0 = \frac{PL}{EA} = \frac{(6.0 \times 10^4)(150)}{(2.0 \times 10^4)(250)} = 1.8 \text{ mm} > \Delta = 1.2 \text{ mm}$$

- ✓ 따라서 접촉이 발생하고 있으므로 우측의 벽은 이 해석에서 고려
- ✓ 전체 FE 방정식은 다음과 같음

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

- ✓ 하중과 경계조건은

$$F_2 = P = 6.0 \times 10^4 \text{ N}$$

$$u_1 = 0, u_3 = \Delta = 1.2 \text{ mm}$$



✓ FE 방정식:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

✓ 이 방정식을 풀면, $u_1 = 0$, $u_2 = 1.5$, $u_3 = 1.2$

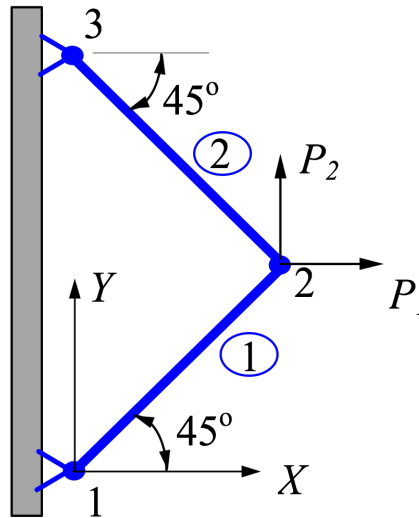
✓ 반력을 구하기 위해, 전체 FE 방정식의 첫 번째와 세 번째 방정식을 사용

$$F_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} (-u_2) = -5.0 \times 10^4 \text{ N}$$

$$F_3 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} (-u_2 + u_3) = -1.0 \times 10^4 \text{ N}$$



예제 2.3



- ✓ 문제: 간단한 평면 트러스가 두 개의 동일한 봉 (E , A , 그리고 L)으로 구성되며 그림과 같이 하중이 적용
- ✓ 계산: (a) 절점 2의 변위, (b) 각 바(Bar)의 응력



✓ 국부좌표계에서, $\mathbf{k}'_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{k}'_2$

✓ 요소 1: $\theta = 45^\circ$, $l = m = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{T}_1^T \mathbf{k}'_1 \mathbf{T}_1 = \frac{EA}{2L} \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

✓ 요소 2: $\theta = 135^\circ$, $l = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{T}_2^T \mathbf{k}'_2 \mathbf{T}_2 = \frac{EA}{2L} \begin{matrix} & \begin{matrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



✓ 구조 FE 방정식을 결합하면

$$\frac{EA}{2L} \begin{matrix} & u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} & = & \begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

✓ 하중과 경계조건 (BC)

$$u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0, \quad F_{2x} = P, F_{2y} = P$$

✓ 축소된 FE (Condensed FE) 방정식

$$\frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$



✓ 위 식의 해를 구하면,
$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{EA} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

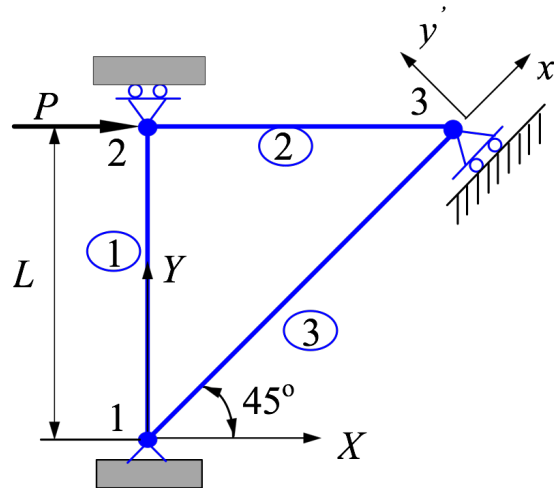
✓ 두 봉에 작용하는 응력은,

$$\sigma_1 = \frac{E\sqrt{2}}{L} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{L}{EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2A} (P_1 + P_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{E\sqrt{2}}{L} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{L}{EA} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2A} (P_1 - P_2)$$



예제 2.4 다중구속 조건 (multipoint constraint: MPC)



✓ 위의 평면 트러스에 대해서

$$\begin{aligned} P &= 1000 \text{ kN}, \quad L = 1 \text{ m}, \quad E = 210 \text{ GPa}, \\ A &= 6.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \quad \text{for elements 1 and 2}, \\ A &= 6\sqrt{2} \times 10^{-4} \text{ m}^2 \quad \text{for element 3} \end{aligned}$$



✓ 요소 1: $\theta = 90^\circ$, $l = 0, m = 1$

$$\mathbf{k}_1 = \frac{(210 \times 10^9)(6.0 \times 10^{-4})}{1} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (N/m)}$$

✓ 요소 2: $\theta = 0^\circ$, $l = 1, m = 0$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{(210 \times 10^9)(6.0 \times 10^{-4})}{1} \begin{bmatrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (N/m)}$$

✓ 요소 3: $\theta = 45^\circ$, $l = \frac{1}{\sqrt{2}}, m = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\mathbf{k}_3 = \frac{(210 \times 10^9)(6\sqrt{2} \times 10^{-4})}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ (N/m)}$$



✓ 전체 FE 방정식:

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ & 1.5 & 0 & -1 & -0.5 & -0.5 \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1.5 & 0.5 \\ Sym. & & & & & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}$$

✓ 하중과 경계조건 (BCs): $u_1 = v_1 = v_2 = 0$, and $v'_3 = 0$,
 $F_{2X} = P$, $F_{3x'} = 0$



✓ 변환 관계식과 경계조건으로 부터

$$v'_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-u_3 + v_3) = 0$$

즉, $u_3 - v_3 = 0$ 이것은 다중구속조건 (MPC)

✓ 유사한 방법으로, 절점 3에서 힘에 대한 관계식은

$$F_{3x'} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(F_{3X} + F_{3Y}) = 0$$

즉, $F_{3X} + F_{3Y} = 0$



✓ 첫 번째, 두 번째, 네 번째 행과 열을 “소거”한 후, 구조 FE 방정식에 하중과 경계조건(BC)를 적용하면 다음을 얻음

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{bmatrix}$$

✓ 더욱이, MPC와 절점 3의 힘관계식으로부터 방정식을 얻음

$$1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ F_{3x} \\ -F_{3x} \end{bmatrix} \quad \text{이것은} \quad 1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ F_{3x} \\ -F_{3x} \end{bmatrix}$$



✓ 이 식의 해를 구하면 변위를 얻음

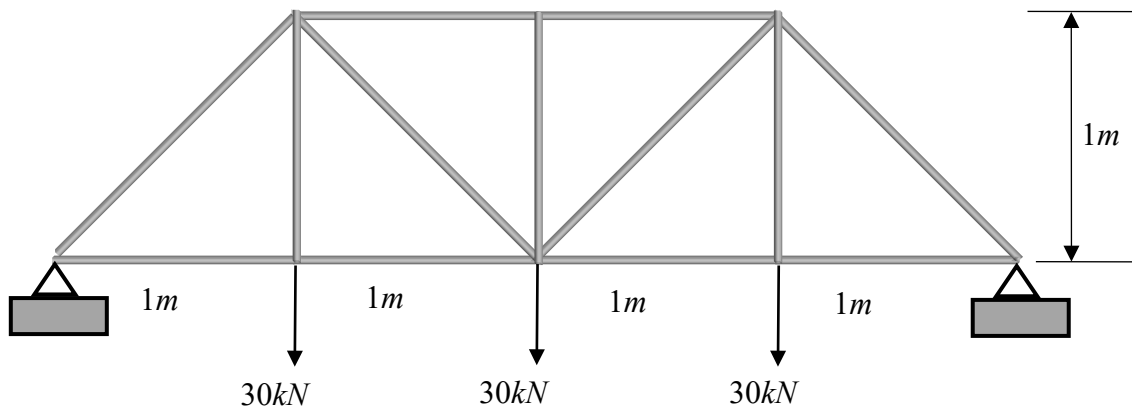
$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2520 \times 10^5} \begin{bmatrix} 3P \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01191 \\ 0.003968 \end{bmatrix} (\text{m})$$

✓ 전체 FE 방정식으로부터 반력 계산,

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{bmatrix} = 1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -500 \\ -500 \\ 0.0 \\ -500 \\ 500 \end{bmatrix} (\text{kN})$$

ANSYS Workbench이용한 사례연구

문제: 트러스 교량은 긴 거리 사이에 걸쳐 중간에 지지점이 없이 무거운 하중을 지지. 이런 교량은 경제적이며 다양한 모양으로 건설이 가능. 다음의 목재로 건설된 평면 트러스를 고려. 목재는 교량 건설에 그림과 같은 구조의 평행한 형태로 사용될 수 있음. 트러스가 주어진 하중조건을 받을 경우, 각 조인트에서 발생하는 처짐량을 결정



Material: Douglas Fir

$E = 13.1 \text{ GPa}$

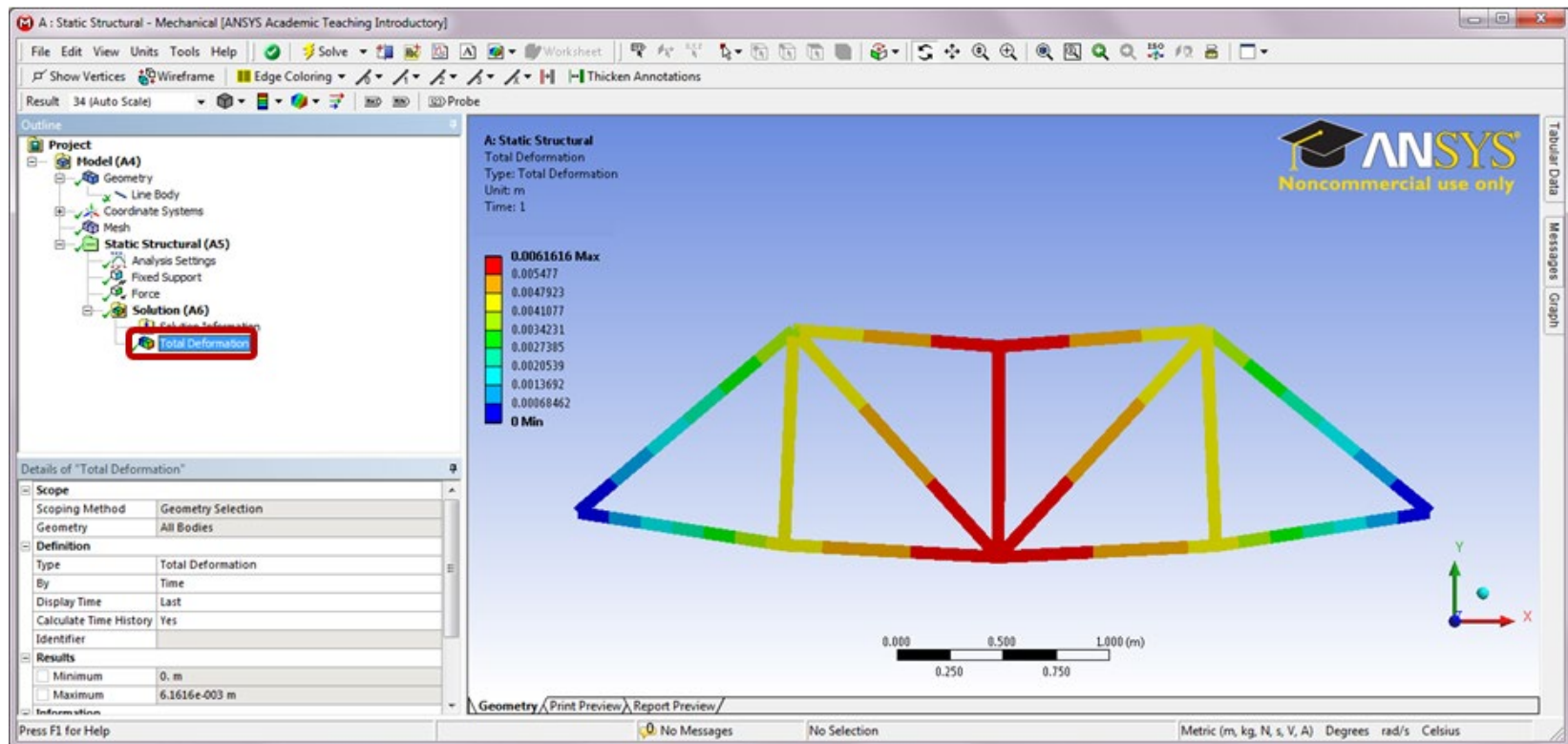
$\nu = 0.29$

Member cross section:

height = 6 cm

width = 6 cm

트러스 변형 결과를 검토하려면 Static Structural Analysis (정적구조해석) 실행





본 장에서 학습한 내용은 다음과 같음

- ✓ 트러스 해석에 사용될 수 있는 봉요소
- ✓ 형상함수의 개념을 소개, 에너지 방법으로 강성행렬의 식을 유도
- ✓ 분포하중을 취급하는 방법과 몇가지 예제